ROZHLEDY
matematicko
-fyzikální

6

Časopis připravuje redakce ve složení: doc. ing. Ivan Štoll, CSc. (vedoucí redaktor), dr. Karel Horák, CSc., doc. dr. Jiří Kadleček, CSc., a redakční rada.

Adresa redakce: Jiří Kadleček, MFF UK Praha, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8
Předplatné: Tiskové středisko JČMF, Žitná 25, 115 67 Praha 1, tel. 2421 3973

OBSAH

ISSN 0035-9343 47 233

ROZHLEDY

matematicko -fyzikální

6 / 1996

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ STŘEDNÍCH ŠKOL
A ZÁJEMCE O MATEMATIKU, FYZIKU A INFORMATIKU

ROČNÍK 73, 1996
CENA 16 Kč (předplatné 14 Kč)

Trojúhelníky SPK a SBT' jsou shodné. Shodují se ve dvou stranách a úhlu α jimi sevřeném. Protože je $SK \perp PK$, je i $ST' \perp BT'$, a tedy přímka BT' je tečnou t' kružnice k.

V roce 1900 píše Max Simon, překladatel „Základů" do němčiny: Konstrukce se mi tak zalíbila, že jsem ji předvedl v Mnichově před stem významných matematiků, většinou vysokoškolských učitelů. Žádný z nich netušil, že je to konstrukce Eukleidova.

Je škoda, že také naši žáci se učí konstrukci nepůvodní (a složitější).

Magická kocka

MARIÁN TRENKLER, katedra geometrie a algebry Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika, Košice

Už od staroveku sa matematici (a nie len oni) zaoberali konštrukciami magických štvorcov. Pravdepodobne prvým magickým štvorcom je štvorec, ktorý je na obrázku 1. Jeho vznik súvisí so starou čínskou legendou a je známy ako *Luo Shu* (*Luo river writing*). Dodnes nie je zrejmý súvis medzi ním a matematickými štúdiami v starej Číne. Tento magický štvorec bol popísaný už v šiestom storočí v práci *Zhen Luana*. Iný veľmi známy magický štvorec (obr. 2) bol namaľovaný na obraze *Melanchólia* ([2], str. 6) významným renesančným maliarom *Albrechtom Dürerom* v roku 1514 (tento letopočet je v strede dolného riadku)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. 2

Magický štvorec rádu n je štvorcová matica (štvorcová tabuľka) rádu n, ktorej prvky sú všetky prirodzené čísla z intervalu $\langle 1, n^2 \rangle$, pričom

súčty v každom riadku, v každom stĺpci a aj v oboch diagonálach sú rovnaké. Ľahko sa odvodí, že súčty čísel vo všetkých riadkoch aj stĺpcoch magického štvorca rádu n sú $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

V literatúre (viď napr. [2]) je popísaná konštrukcia magických štvorcov rádu n pre všetky prirodzené čísla $n \neq 2$.

Zovšeobecnením pojmu magický štvorec je magická kocka. Na obrázku 3 je nakreslená magická kocka rádu 4.

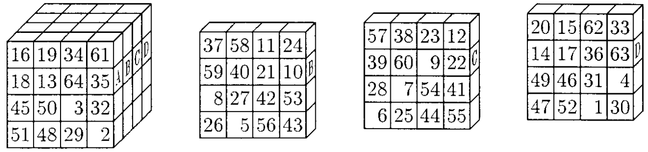
Definícia. *Magická kocka* rádu n je trojrozmerná matica (tabuľka)

$$\boldsymbol{Q}_n = [q(i,j,k)\,;\ 1 \leqq i,j,k \leqq n],$$

ktorej prvky sú všetky prirodzené čísla z intervalu $\langle 1, n^3 \rangle$, pričom platí

$$\sum_{x=1}^{n} q(x,j,k) = \sum_{x=1}^{n} q(i,x,k) = \sum_{x=1}^{n} q(i,j,x) = \frac{n(n^3+1)}{2}.$$

Každý prvok kocky je jednoznačne určený trojicou čísel (i,j,k), ktoré nazývame súradnice prvku.



Obr. 3

Magický štvorec rádu 1 je aj magickou kockou rádu 1. Pretože neexistuje magický štvorec rádu 2, neexistuje ani magická kocka rádu 2.

V tomto príspevku dokážeme nasledujúcu vetu:

Veta. *Pre všetky prirodzené čísla $n \neq 2$ existuje magická kocka rádu n.*

Skôr ako dokážeme túto vetu budeme sa zaoberať latinskými štvorcami.

Latinský štvorec $\boldsymbol{R}_n = [r(i,j);\ 1 \leqq i,j \leqq n]$ rádu n je štvorcová matica rádu n taká, že v každom riadku aj stĺpci sa nachádzajú permutácie množiny prirodzených čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dva latinské štvorce $\boldsymbol{R}_n = [r(i,j)]$

a $S_n = [s(i,j)]$ rádu n nazývame *ortogonálne*, ak n^2 usporiadaných dvojíc $[r(i,j), s(i,j)]$, kde $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$, je navzájom rôznych.

Dva ortogonálne latinské štvorce rádu 5 sú uvedené na obrázku 4.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Obr. 4

Ak sa pozorne pozriete na túto dvojicu ortogonálnych latinských štvorcov, tak ľahko nájdete pravidlo, pomocou ktorého zostavíte dvojicu ortogonálnych štvorcov pre všetky nepárne prirodzené čísla n. Tento fakt bol známy už *L. Eulerovi* začiatkom 18. storočia.

Bolo to však až v roku 1960, keď *R. C. Bose*, *S. S. Shrikhande* a *E. T. Parker* (viď [1], str. 57) dokázali, že dva ortogonálne latinské štvorce rádu n existujú práve vtedy, keď $n \neq 2$ a $n \neq 6$. Toto tvrdenie použijeme v dôkaze našej vety.

Dôkaz vety. Nech $R_n = [r(i,j);\ 1 \leqq i,j \leqq n]$ a $S_n = [s(i,j);\ 1 \leqq i,j \leqq n]$ sú dva ortogonálne latinské štvorce rádu n a $M_n = [m(i,j);\ 1 \leqq i,j \leqq n]$ je magický štvorec rádu n.

Definujme magickú kocku $Q_n = [q(i,j,k);\ 1 \leqq i,j,k \leqq n]$ nasledovne:

$$q(i,j,k) = [s(i,r(j,k)) - 1]n^2 + m(i,s(j,k)) \quad \text{pre všetky } 1 \leqq i,j,k \leqq n.$$

V štyroch krokoch dokážeme, že Q_n je magická kocka.

1. Všetky prvky štvorcov R_n a S_n sú z množiny $\{1,2,\dots,n\}$ a všetky prvky M_n sú z množiny $\{1,\dots,n^2\}$. Z toho bezprostredne vyplýva, že pre všetky prvky Q_n platí $1 \leqq q(i,j,k) \leqq n^3$.

2. V tejto časti dokážeme, že žiadne dva prvky Q_n s rôznymi indexami nie sú rovnaké.

Predpokladajme, že platí $q(i,j,k) = q(i',j',k')$, a ukážeme, že z tohto predpokladu vyplývajú rovnosti $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$.

Podľa definície magickej kocky Q_n platí

$$[s(i,r(j,k)) - 1]n^2 + m(i,s(j,k)) = [s(i',r(j',k')) - 1]n^2 + m(i',s(j',k')),$$

úpravou dostávame rovnosť

$$-[s(i,r(j,k)) - s(i',r(j',k'))]n^2 = m(i,s(j,k)) - m(i',s(j',k')). \quad (1)$$

Bez ujmy na všeobecnosti, môžeme predpokladať, že $m(i,s(j,k)) \geqq m(i',s(j',k'))$. Pretože všetky čísla v magickom štvorci sú z intervalu $\langle 1,n^2\rangle$, ich rozdiel nie je nenulovým násobkom čísla n^2. Na ľavej strane (1) je celočíselný násobok čísla n^2 a na pravej strane nezáporné číslo, ktoré je buď nula, alebo nie je deliteľné číslom n^2. Rovnosť vo vzťahu (1) nastáva preto práve vtedy, keď $s(i,r(j,k)) - s(i',r(j',k')) = 0$. Z toho vyplývajú nasledujúce dve rovnosti

$$s(i,r(j,k)) = s(i',r(j',k')), \quad (2)$$
$$m(i,s(j,k)) = m(i',s(j',k')). \quad (3)$$

V magickom štvorci M_n žiadne dva prvky nie sú rovnaké. Ak sa dva prvky magického štvorca rovnajú, tak obe ich súradnice musia byť rovnaké, tj. z (3) vyplývajú rovnosti

$$i = i', \qquad s(j,k) = s(j',k').$$

Dosadením rovnosti $i = i'$ do (2) dostávame $s(i,r(j,k)) = s(i,r(j',k'))$. Pretože S_n je latinský štvorec, z rovnosti prvých súradníc vyplýva rovnosť druhých súradníc, tj. platí $r(j,k) = r(j',k')$. Z predpokladov, že R_n a S_n sú ortogonálne latinské štvorce, a zo vzťahov

$$s(j,k) = s(j',k'), \qquad r(j,k) = r(j',k')$$

dostávame rovnosti $j = j'$, $k = k'$.

3. Ďalej ukážeme, že súčet čísel v každom „riadku“ je rovnaký.

$$\sum_{x=1}^{n} q(x,j,k) = \sum_{x=1}^{n} [s(x,r(j,k)) - 1]n^2 + \sum_{x=1}^{n} m(x,s(j,k)) =$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right]n^2 + n\frac{n^2+1}{2} = n\frac{n^3+1}{2},$$

analogicky dostávame

$$\sum_{x=1}^{n} q(i,x,k) = \sum_{x=1}^{n} q(i,j,x) = n\frac{n^3+1}{2}.$$

4. Konštrukcia magickej kocky používa dvojicu ortogonálnych latinských štvorcov, a preto nie je použiteľná pre $n = 6$. Magická kocka $\boldsymbol{Q}_6$ je uvedená v práci [3].

Poznámka 1. Ak ste zistili ako sa dá urobiť dvojica ortogonálnych latinských štvorcov pre nepárne n, tak z uvedeného ľahko vytvoríte program pre počítač, ktorý bude vytvárať magické kocky pre všetky nepárne n. Magický štvorec $\boldsymbol{M}_n$ môžete v programe nahradiť štvorcom $\boldsymbol{M}_n^* = [m^*(i,j)]$, kde $m^*(i,j) = [r(i,j) - 1]n^2 + s(i,j)$ pre všetky $1 \leqq i,j \leqq n$. V tomto štvorci nemusia byť súčty čísel na diagonálach rovnaké, pretože to nevyužívame.

Pri konštrukcii magickej kocky rádu 4, ktorá je nakreslená na obrázku 3, sme vychádzali z magického štvorca nakresleného na obrázku 2 a z dvoch ortogonálnych latinských štvorcov, ktoré sú nakreslené na obrázku 5.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Obr. 5

Poznámka 2. Zovšeobecnením uvedenej metódy sa dajú vytvárať aj magické hyperkocky rádu $n \neq 2, 6$ v p-rozmernom euklidovskom priestore, kde $p \geqq 4$.

Literatúra:

[1] J. Bosák: *Latinské štvorce.* Škola mladých matematikov 38, Praha 1976.
[2] M. M. Postnikov: *Magičeskije kvadraty.* Nauka, Moskva 1964.
[3] M. Trenkler: *Magic graphs and their generalization.* In: 4. Kolloquium Geometrie und Kombinatorik, TH Chemnitz, 1991, 97–102.

Pravá veselost nejen nevadí důstojnosti lidské, ale je i podstatnou podmínkou její dokonalosti.

Bernard Bolzano